

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

### ЗАДАЧА 1

Найти интегралы.

1.1. а)  $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ ; б)  $\int x \sin 2x dx$ ; в)  $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$ ; г)  $\int \frac{x^3+4}{x^2-x} dx$ .

1.2. а)  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$ ; б)  $\int x \cos 3x dx$ ; в)  $\int \frac{2dx}{x^2+4x+25}$ ; г)  $\int \frac{x^4-2}{x^2+2x} dx$ .

1.3. а)  $\int \frac{6x+1}{2x^2-1} dx$ ; б)  $\int (x+2)e^x dx$ ; в)  $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$ ; г)  $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$ .

1.4. а)  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$ ; б)  $\int \arcsin x dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^2-4x+15}$ ; г)  $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$ .

1.5. а)  $\int \frac{3x+2}{1+2x^2} dx$ ; б)  $\int \operatorname{arctg} x dx$ ; в)  $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$ ; г)  $\int \frac{2x^2+1}{x^2-3} dx$ .

1.6. а)  $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$ ; б)  $\int x^2 \ln x dx$ ; в)  $\int \frac{2dx}{x^2-2x+5}$ ; г)  $\int \frac{x^3+2}{x^2-4x} dx$ .

1.7. а)  $\int \frac{1-5x}{1+25x^2} dx$ ; б)  $\int (3-2x) \sin 3x dx$ ; в)  $\int \frac{4dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$ ; г)  $\int \frac{3x^3-2}{x^2-x} dx$ .

1.8. а)  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}} dx$ ; б)  $\int x \sin 2x dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$ ; г)  $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$ .

1.9. а)  $\int \frac{4x-3}{3x^2-4} dx$ ; б)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ; в)  $\int \frac{3dx}{x^2-4x+1}$ ; г)  $\int \frac{x^4}{x^2-3} dx$ .

1.10. а)  $\int \frac{1-3x}{4x^2-1} dx$ ; б)  $\int x^2 \ln(1+x) dx$ ; в)  $\int \frac{2dx}{x^2-4x+10}$ ; г)  $\int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$ .

### ЗАДАЧА 2

Вычислить интеграл.

2.1.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx$ .

2.2.  $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x dx$ .

2.3.  $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x dx$ .

2.4.  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$ .

2.5.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^4 x dx$ .

2.6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x dx$ .

$$2.7. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x dx. \quad 2.8. \int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x dx. \quad 2.9. \int_0^{\pi} \sin^5 x dx. \quad 2.10. \int_0^{\pi} \cos^5 x dx.$$

### ЗАДАЧА 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$3.1. y = (x-1)^2; y = -x+3. \quad 3.2. y = x^2; y = 3x. \quad 3.3. y = x^2 + x; y = x+1.$$

$$3.4. y = -(x+1)^2; y = -2x-5. \quad 3.5. y = (x+2)^2; y = 5x+6.$$

$$3.6. y = -(x-1)^2; y = 2x-5. \quad 3.7. y = (x+3)^2; y = 3x+9.$$

$$3.8. y = (x+2)^2; y = 4. \quad 3.9. y = 4x^2; y = x^4. \quad 3.10. y = -x^2; y = -x-6.$$

### ЗАДАЧА 4

Вычислить интеграл.

$$4.1. \iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

$$4.2. \iint_D \left( \frac{4}{5}xy + 9x^2y^2 \right) dx dy; \quad D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}.$$

$$4.3. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}.$$

$$4.4. \iint_D (6xy + 24x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}.$$

$$4.5. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$4.6. \iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}.$$

$$4.7. \iint_D (44xy + 16x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$4.8. \iint_D (xy - 4x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$$

$$4.9. \iint_D (8xy + 18x^2y^2) dx dy; \quad D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x}.$$

$$4.10. \iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy; \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$$

## ЗАДАЧА 5

**5.1.** Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Первоначальный запас радия равен  $M$ . Известно, что по истечении 1600 лет останется половина первоначального запаса. Найти, сколько радия окажется нераспавшимся по истечении 800 лет.

**5.2.** Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству  $x$  бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент  $t$ . Количество бактерий в начальный момент было  $x_0$ . Найти зависимость количества бактерий от времени, если известно, что через 5 часов количество бактерий увеличилось в три раза.

**5.3.** Тело массой  $m = 2$  кг движется прямолинейно под действием силы  $F$ , возрастающей на 3 Н в секунду. В начальный момент сила  $F$  равна 4 Н, скорость равна 10 м/с. Найти зависимость скорости от времени.

**5.4.** Определить путь  $S$ , пройденный телом за время  $t$ , если его скорость пропорциональна пройденному пути и, если тело проходит 100 м в 10 секунд и 200 м в 15 секунд.

**5.5.** Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 секунд станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

**5.6.** Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха (коэффициент пропорциональности  $k = 0,5$ ). Найти зависимость температуры тела  $T$  от времени  $t$ , если температура тела в начальный момент времени равна  $80^\circ$ , а температура воздуха  $20^\circ$ .

**5.7.** Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его наличному количеству. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от его первоначального количества?

**5.8.** Тело массой  $m = 3$  кг замедляет свое движение под действием силы сопротивления, которая пропорциональна кубу его скорости (коэффициент пропорциональности  $k = 3$ ). Начальная скорость тела равна 10 м/с. Какой будет скорость тела в момент времени  $t$ ?

**5.9.** Тело массой  $m = 1$  кг движется прямолинейно под действием силы, пропорциональной времени (коэффициент пропорциональности  $k = 20$ ), отсчитываемого от момента  $t = 0$ , и обратно пропорциональной скорости движения точки. Какова будет скорость в момент времени  $t$ , если в момент  $t = 10$  с скорость  $v = 50$  м/с?

**5.10.** Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения  $v$  на время  $t$ . Установить зависимость между скоростью и временем, если при  $t = 0$  скорость  $v = v_0$ .

### ЗАДАЧА 6

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

**6.1.** а)  $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' - \frac{y}{x} = x^2$ .

**6.2.** а)  $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = x^2$ .

**6.3.** а)  $x\sqrt{4+y^2}dx - y\sqrt{x^2+1}dy = 0$ ;      б)  $y' - \frac{y}{x} = x$ .

**6.4.** а)  $x\sqrt{3+y^2}dx - y\sqrt{4+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = x$ .

**6.5.** а)  $\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 1$ .

**6.6.** а)  $\sqrt{2+y^2}dx - y\sqrt{4-x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = x^2 - 2$ .

**6.7.** а)  $x\sqrt{5+y^2}dx - y\sqrt{3+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' - \frac{y}{x} = x^3 + 1$ .

**6.8.** а)  $x\sqrt{4-y^2}dx - \sqrt{5+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' + \frac{y}{x} = x^3$ .

**6.9.** а)  $x\sqrt{1+y^2}dx + \sqrt{3+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' - \frac{y}{x} = x^4 - 1$ .

**6.10.** а)  $x\sqrt{5+y^2}dx - y\sqrt{6+x^2}dy = 0$ ;      б)  $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ .

## ЗАДАЧА 7

Найти работу силы  $\vec{F} = \{P(x, y); Q(x, y)\}$  при перемещении вдоль отрезка  $BC$  от точки  $B$  к точке  $C$ .

**7.1.**  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = y - x$ ,  $B(-1;0)$ ,  $C(0;1)$ .

**7.2.**  $P(x, y) = 2xy$ ,  $Q(x, y) = x^2$ ,  $B(0;0)$ ,  $C(2;1)$ .

**7.3.**  $P(x, y) = xy$ ,  $Q(x, y) = y + x$ ,  $B(0;0)$ ,  $C(1;1)$ .

**7.4.**  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = y - x$ ,  $B(-2;0)$ ,  $C(0;2)$ .

**7.5.**  $P(x, y) = x^2 y$ ,  $Q(x, y) = y$ ,  $B(-1;0)$ ,  $C(0;1)$ .

**7.6.**  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = y + x$ ,  $B(0;0)$ ,  $C(1;1)$ .

**7.7.**  $P(x, y) = 2xy$ ,  $Q(x, y) = x^2$ ,  $B(0;0)$ ,  $C(1;2)$ .

**7.8.**  $P(x, y) = 3xy$ ,  $Q(x, y) = x - y$ ,  $B(0;0)$ ,  $C(2;2)$ .

**7.9.**  $P(x, y) = x^2 y$ ,  $Q(x, y) = y$ ,  $B(-2;0)$ ,  $C(0;2)$ .

**7.10.**  $P(x, y) = 2xy$ ,  $Q(x, y) = x^2$ ,  $B(0;0)$ ,  $C(1;3)$ .