КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ЗАДАЧА 1

Вычислить производные функций.

1.1. а) $y=\left(3x^2+10\right)\cdot\cos x$; б) $y=\dfrac{2x^2}{\cos x}$; в) $y=\sin^4\left(3x+8\right)^8$.

1.2. а) $y=\operatorname{ctg}x\cdot e^x$; б) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; в) $y=\ln^4(\sin x^3)$.

1.3. а) $y=x^2\cdot\operatorname{tg}x$; б) $y=\dfrac{x}{1-4x^2}$; в) $y=\cos^3 e^{2x-1}$.

1.4. а) $y=\cos x\cdot\arcsin x$; б) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; в) $y=\cos^2(x-3)^9$.

1.5. а) $y=\operatorname{tg}x\cdot(x^3+3)$; б) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; в) $y=\operatorname{tg}^4(3x+1)^8$.

1.6. а) $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$; б) $y=\dfrac{\cos x}{4-x}$; в) $y=e^{\sin\left(1+4x\right)^{10}}$.

1.7. а) $y=\left(4-x^2\right)\cdot\cos x$; б) $y=\dfrac{4x^2}{1+x}$; в) $y=\operatorname{ctg}^{10}e^{3x-1}$.

1.8. а) $y=3^x\cdot\sin x$; б) $y=\dfrac{3x^3}{\cos x}$; в) $y=\cos^3(2x+1)^{12}$.

1.9. а) $y=2^x\cdot\cos x$; б) $y=3-\dfrac{\operatorname{tg}x}{3^x}$; в) $y=\sin^2\ln^5 x$.

1.10. а) $y=\left(x^2-8\right)\cdot\operatorname{ctg}x$; б) $y=\dfrac{3x^3}{\sin x}$; в) $y=\sin^5(4x-1)^2$.

ЗАДАЧА 2

Найти производную от функции, заданной неявно.

2.1. $\sin\left(x+y\right)-\ln\left(x+y\right)+a=x$.

2.2. $\cos y-xy+a=0$.

2.3. $\operatorname{arctg}\left(x+1\right)+e^y+a=0$.

2.4. $\arcsin\left(x+3\right)+\sin\left(x+y\right)+a=0$.

2.5. $\sqrt{x^2+1}-5xy+a=0$.

2.6. $\sin\sqrt{x^2-1}+e^{x+y}+a=0$.

2.7. $x\operatorname{arctg}y-x^2+a=0$.

2.8. $\cos\left(x+y\right)+xy-a=0$.

2.9. $\sin\left(x+y\right)+\sqrt{x^2+1}-a=0$.

2.10. $x\ln y+x^2+y^2+a=0$.

ЗАДАЧА 3

Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически.

3.1. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}; \\ y = e^t. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^3. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x = \mathrm{tg}\, t; \\ y = \sin t. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x = \mathrm{ctg}\, t; \\ y = \cos t. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x = t^2 + t; \\ y = e^t. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t; \\ y = \dfrac{1}{1+t}. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln t. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}; \\ y = t^2. \end{cases}$

ЗАДАЧА 4

4.1. Точка движется прямолинейно по закону $S = 3t^2 - 2t + 5$. Найти скорость движения точки и ускорение в момент времени $t = 5$ *с*.

4.2. Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^2 - 8t - 10$. Найти скорость движения точки и ускорение в конце 8 *с*.

4.3. Точка движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t = 4$ *с*.

4.4. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. Найти скорость движения точки и ускорение в момент времени $t = 2$ *с*.

4.5. Точка движется прямолинейно по закону $S = \sqrt{t}$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t = 1$ *с*.

4.6. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 11t + 30$. Найти величину скорости и ускорения в момент времени $t = 3$ *с*.

4.7. Точка движется прямолинейно по закону $S = 6t - t^2$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

4.8. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 - 8t + 4$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

4.9. Точка движется прямолинейно по закону $S = 4\sin 3t$. Найти скорость движения точки в момент времени $t = \frac{\pi}{9}c$.

4.10. Найти ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону $S = \sin 2t$, в момент времени $t = \frac{\pi}{6}$.

ЗАДАЧА 5

Найти предел, используя правило Лопиталя.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \cos x - x}{x^2}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2 - 1}{x^2}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x - x^2}{x^4}$.

ЗАДАЧА 6

6.1. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

6.2. Через точку $P(1;4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

6.3. В полукруг радиуса 10 см вписан прямоугольник. Каковы должны быть его размеры, чтобы площадь его была наибольшей?

6.4. Чему должны быть равны катеты прямоугольного треугольника, чтобы он имел наибольшую площадь при длине гипотенузы, равной h?

6.5. Проволокой длиной 20 м требуется огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора. Какой следует взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

6.6. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a см. Определить большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

6.7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна задан и равен P. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

6.8. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости V на его изготовление пошло минимум материала?

6.9. Резервуар имеет форму прямоугольного параллелепипеда (сверху открытого) с квадратным дном. При каких линейных размерах полная поверхность будет наименьшей, если резервуар имеет объем 500 куб. ед.?

6.10. Требуется изготовить прямоугольный ящик (без крышки) с прямоугольным основанием и заданным объемом V, отношение сторон основания которого равнялось бы числу k. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы его поверхность была наименьшей?

ЗАДАЧА 7

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график.

7.1. $y=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$. **7.2.** $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x-3}$. **7.3.** $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

7.4. $y=\dfrac{x^2-2x+9}{x-2}$. **7.5.** $y=\dfrac{x^2+3x+4}{x}$. **7.6.** $y=\dfrac{x^2-6x+10}{x-3}$.

7.7. $y=\dfrac{x^2+2x+8}{x+4}$. **7.8.** $y=\dfrac{x^2-2x+8}{x-4}$. **7.9.** $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x-5}$.

7.10. $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x+5}$.

ЗАДАЧА 8

Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}$ функции $u = f(x, y, z)$ в точке M.

8.1. $u = x^3yz,$ $\vec{l} = (2,3,-1),$ $M = (1,-1,3)$.

8.2. $u = x^2 - 3yz + 5,$ $\vec{l} = (1,-2,-1)$ $M = (1,2,-1)$.

8.3. $u = x + \ln(y^2 + z^2),$ $\vec{l} = (-2,4,-3),$ $M = (2,1,1)$.

8.4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $\vec{l} = (2, -3, 3)$, $M = (1, -3, 4)$.

8.5. $u = x^3 y + xz^3 + xyz$, $\vec{l} = (1, -2, 3)$ $M = (1, 1, 1)$.

8.6. $u = x^2 + 2y^2 + z^3$, $\vec{l} = (-3, 2, -2)$ $M = (1, 3, 2)$.

8.7. $u = xy + yz + zx$, $\vec{l} = (3, 4, 12)$ $M = (2, 1, 3)$.

8.8. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$, $\vec{l} = (2, -3, 4)$, $M = (0, -3, 4)$.

8.9. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$, $\vec{l} = (2, -2, 5)$, $M = (1, 5, -2)$.

8.10. $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$, $\vec{l} = (2, 1, -3)$ $M = (2, 2, 4)$.